

文章编号: 1000-7598 (2009) 02-0503-06

基于非线性破坏准则的主动土压力上限计算

杨建民

(湖南城市学院 土木工程学院, 湖南 益阳 413000)

摘 要: 主要叙述了一种基于非线性破坏准则下的主动土压力计算分析方法。引入 Power-Law 非线性破坏准则, 并根据切线法引入了变量 c_t 、 φ_0 , 建立了一个统一的容许速度场, 通过上限分析得出了主动土压力的计算表达式。由于主动土压力计算表达式中自变量个数繁多, 为实现对上限解的最优化, 应用了大型的数学规划软件, 采用了目前广泛使用的 SQP 算法, 得出了最优的上限解。通过与同样引入 Power-Law 非线性破坏准则后的朗肯土压力理论解的比较, 发现所述的方法切实有效, 并且适用范围更加广泛。

关 键 词: 主动土压力; Power-Law 非线性破坏准则; 上限分析; 大型数学规划; 非线性朗肯土压力
中图分类号: TU 432 **文献标识码:** A

Upper bound solution for active earth pressure based on a nonlinear failure criterion

YANG Jian-min

(School of Civil Engineering, Hunan City University, Yiyang 413000, China)

Abstract: An upper bound solution for active earth pressure based on a nonlinear failure criterion is described mainly. Firstly, the power-law nonlinear failure criterion is proposed. Then the variables c_t and φ_0 are introduced by tangents method; and a unified acceptable velocity field is established. By upper bound analysis, the expression of the active earth pressure is formulated. Because of too many variables in the expression of the earth active pressure, in order to optimize the upper bound solution, large-scale mathematical programming method is applied, in which the widely used SQP algorithm is adopted. Calculating the active earth pressure using the method presented is found to be more efficient; and had a larger range of application comparing with the classical Rankine's earth pressure theory.

Key words: active earth pressure; power-law nonlinear failure criterion; upper bound analysis; large-scale mathematical programming; Rankine's earth pressure with a nonlinear failure criterion

1 引 言

挡土墙土压力问题一直是岩土工程界中广泛研究的一个课题。从理论到实测, 国内外很多专家学者都对其做过大量的研究, 其主要研究方法包括极限平衡法、极限分析法。

从 20 世纪 50 年代以来, 人们在 Fellenius^[1]的极限平衡条分法基础上, 逐渐发展了各种各样的极限平衡分析方法。在分析中, 主要是对条间力作了各种不同的假设, 使得土坡稳定这一超静定问题变成静定问题, 从而求得土坡的安全系数。在实践中经常用到 Fellenius 法、Bishop 法、Janbu 法、Morgenstern 和 Price 法、Spencer 和 Sarma 法。

自从 Drucker 和 Prager (1952 年)^[1]将极限分析法应用于土力学后, 极限分析方法在土坡稳定性、基础承载力、挡土墙土压力等方面得到了广泛应用。与极限平衡法将土视为刚塑性体并不考虑土的实际本构关系不同的是: 极限分析法将土模拟为理想塑性材料, 以一种理想的方式即正交法则 (或流动法则) 考虑了土的本构关系, 由此可以推导出两个塑性极限 (上限和下限) 定理, 分别假设运动许可的速度场和静力许可的应力场, 根据外功率与塑性变形区的内部能量耗损率相等的条件建立起虚功方程, 从而求得上限解和下限解; 然后, 根据极值原理得到最小上限和最大下限, 作为问题的极限荷载。虽然极限分析法与极限平衡法相比更加严

格,但这种方法求解的难度就在于建立合适的应力场和速度场,同时优化解(最高下限和最低上限)的求解也比较困难。

另外,在实际工程中,大量的实测数据都表明,岩土类介质在破坏过程中最大主应力和最小主应力的关系是非线性的,而目前的极限平衡分析方法或者极限分析中采用的破坏准则大多为线性 Mohr-Coulomb 破坏准则,或者是将非线性问题作线性简化,这必然导致分析结果与实际存在差别。

为此,本文将基于非线性破坏准则对墙后主动土压力进行上限分析,将墙后土体划分为多个刚性土块,基于非线性破坏准则,建立了统一的速度场模式;通过 SQP 法(二次序列规划法)编制程序后进行速度场的优化,得出了最优的上限解,从而确定了主动土压力的大小。

2 Power-Law 非线性破坏准则

在岩土工程中大都采用线性 Mohr-Coulomb 准则,认为最大主应力 σ_1 和最小主应力 σ_3 呈线性关系,其表达式为^[1-5]

$$\sigma_1 = q_p + M_p \sigma_3 \quad (1)$$

式中: q_p 为三轴试验时无侧限抗压强度; M_p 为常数,它们均与岩土材料的抗剪强度指标有关,其关系式为^[1-5]

$$\left. \begin{aligned} M_p &= \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \\ q_p &= \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: c 为黏聚力; φ 为摩擦角。

早在 1977 年 Lade^[2]在对无黏性砂土进行三轴试验时就发现,试件破坏时大、小主应力关系是非线性的;1985 年、1987 年 Agar 和 Santarelli 等分别对两种不同的岩石进行三轴试验,试验结果表明,破坏时屈服面上的最大主应力和侧限压力(即小主应力)也是非线性关系的^[1-2],其非线性关系可由下式描述:

$$\sigma_1 = q_p + M_p^* \left(\frac{\sigma_3}{q_p} \right)^\alpha \quad (3)$$

式中: M_p^* 和 α 均为三轴试验确定的参数。

在应力空间 (τ, σ_n) 中,式(3)可等价于下式:

$$\tau = c_0 \left(1 + \frac{\sigma_n}{\sigma_t} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (4)$$

式中: c_0 为曲线与纵轴的截距; σ_t 为曲线与横轴的截距; τ 为剪应力; σ_n 剪切面上法向应力; m 为岩土材料参数,其对应的摩擦角为 φ_0 。当 $m=1$ 时,式(4)即为线性 Mohr-Coulomb 破坏准则的表达式。

将式(4)绘制成曲线,如图 1 所示。

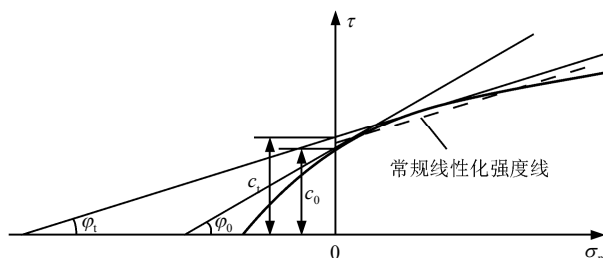


图 1 非线性破坏准则曲线及其切线
Fig.1 The curve of a nonlinear failure criterion and its tangential line

从图 1 可以看出,由于破坏准则为曲线,故 c 、 φ 值不为常量,其值与法向应力 σ_n 有关,而在土体中的不同位置,由于 σ_n 的不同,则 c 、 φ 值也不同。大多数计算都是采用线性化的破坏准则曲线,取的是单一的 c 、 φ 值,而本文则完全依据非线性破坏曲线,考虑到对应于不同的应力状态有不同的 c 、 φ 值,计算时采用的是多组 c 、 φ 值。由于计算需要,采用切线法建立了 c 、 φ 之间的关系式,即在 Power-Law 破坏曲线上取一点作其切线,如图 1 所示,其与 τ 轴的截距即为 c 值,其斜率的反正切值即为 φ 值。

任取一点,则其切线方程可表示为

$$\tau = c_t + \tan \varphi_t \sigma_n \quad (5)$$

式中: c_t 、 $\tan \varphi_t$ 分别为切线的截距和斜率。由于均为瞬时值,所以计为 c_t 、 $\tan \varphi_t$,其表达式为

$$c_t = c_0 \left(\frac{m \sigma_t \tan \varphi_t}{c_0} \right)^{\frac{1}{1-m}} - \sigma_n \tan \varphi_t \quad (6)$$

$$\tan \varphi_t = \frac{d\tau}{d\sigma_n} = \frac{c_0}{m \sigma_t} \left(1 + \frac{\sigma_n}{\sigma_t} \right)^{\frac{1-m}{m}} = \frac{\tan \varphi_0}{m} \left(1 + \frac{\sigma_n}{\sigma_t} \right)^{\frac{1-m}{m}} \quad (7)$$

3 速度场的建立

将墙后土体划分为 k 个三角形刚性土块,如

图2所示, 每个三角形单元的形状和大小由 L_i 、 α_i 和 β_i 控制, 它们的底边连接起来的折线可以模拟为墙后土体破坏时的破裂面。若已知挡墙的高度为 H , 则可以依次推得各个三角形的形状和大小。

三角形各边的边长为

$$L_i = \frac{H \prod_{j=1}^i \sin(\alpha_j + \beta_j)}{\prod_{j=1}^i \sin \beta_j} \quad (8)$$

底边的边长为

$$L'_i = \frac{H \prod_{j=1}^i \sin(\alpha_j + \beta_j)}{\prod_{j=1}^i \sin \beta_j} \frac{\sin \alpha_i}{\sin(\alpha_i + \beta_i)} \quad (9)$$

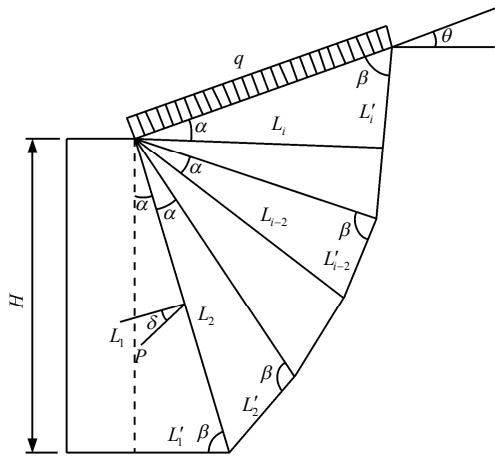


图2 单元划分示意图

Fig.2 Diagram of element division

图3给出了主动土压力的速度场示意图。根据相关联的正交流动法则, 刚体平移时位移速度与刚体界面必呈 φ 角。但由于不同单元边界处的法向应力 σ_n 不同, φ 角的取值也是不同的, 故三角形公共边上的瞬时摩擦角用 φ_i 表示, 而三角形底边的瞬时摩擦角用 φ'_i 表示。由于在三角形单元公共边处存在速度不连续面, 所以每条公共边上的速度都是相对的, 并假定塑性功的耗散只发生在三角形公共边和底边上。

图4给出了第1号单元和第 i 号单元的速度矢量图, 其中 V_1 为破坏时挡墙的绝对速度; V_i 为地基中第 i 号块的绝对速度; $V_{1,2}$ 为1号块和2号块之间的相对速度; $V_{i-1,i}$ 为第 $i-1$ 号块与第 i 号块之间的相对速度。

根据递推关系, 可得

$$V_i = \frac{V_1 \prod_{j=2}^i \sin(\beta_{j-1} - \varphi_j - \varphi'_{j-1})}{\prod_{j=2}^i \sin(\alpha_j + \beta_j - \varphi'_j - \varphi_j)} \quad (10)$$

$$V_{i-1,i} = V_i \frac{\sin(\alpha_i + \beta_i - \beta_{i-1} + \varphi'_{i-1} - \varphi'_i)}{\sin(\beta_{i-1} - \varphi'_{i-1} - \varphi_i)} \quad (11)$$

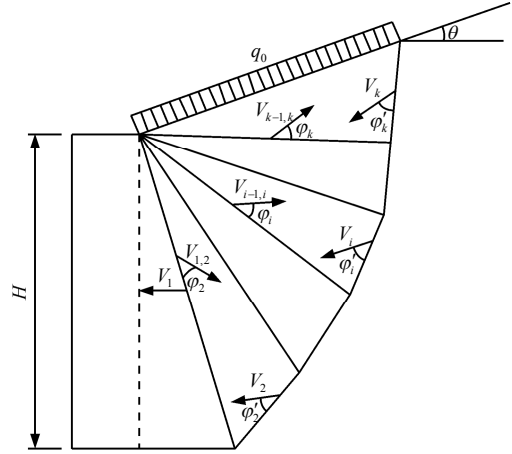


图3 主动破坏机制下的速度场

Fig.3 The velocity field of the active failure mechanism

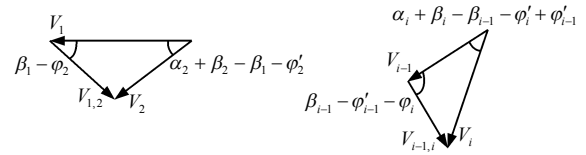


图4 主动土压力第1号单元和第 i 号单元的速度矢量图

Fig.4 The velocity hodograph for the first and the i th elements

4 上限分析

4.1 内能消耗率的计算

由于内能的耗散仅发生在速度不连续面上, 即三角形单元的公共边和底边上, 故内能耗散率为

$$\dot{W}_{\text{int}} = \sum_{i=1}^k L_i c_i V_{i,i+1} \cos \varphi_{i+1} + \sum_{i=2}^k L'_i c'_i V_i \cos \varphi'_i \quad (12)$$

式中: c_i 和 c'_i 分别为三角形单元公共边和底边上的瞬时黏聚力。

4.2 外力作功率的计算

作用在土楔体上的外力包括重力、主动或被动土压力以及超载, 因此, 需要考虑它们对土楔体的作功率。

4.2.1 重力作功率

设挡土墙的高度为 H , 墙后土体的重度为 γ , 则重力的作功率为

$$\dot{W}_{\text{gra}} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2} L_i L_{i+1} \sin \alpha_{i+1} \cdot \sin \left(\sum_{j=1}^{i+1} \alpha_j + \beta_{i+1} + \varphi'_{i+1} - \frac{\pi}{2} \right) V_{i+1} \gamma \quad (13)$$

4.2.2 土压力的作功率计算

设墙与土的摩擦角为 δ ，墙体的位移方向为水平，速度为 V_1 ，则主动土压力的作功率 $\dot{W}_a$ 为

$$\dot{W}_a = P_a V_1 \cos(\alpha_1 + \delta) \quad (14)$$

4.2.3 超载作功率的计算

设超载大小为 q_0 ，作用于墙后土体的表面上，与水平方向的倾角为 θ ，作用的长度为 L_k ，速度为 V_k ，则超载作功率 $\dot{W}_q$ 为

$$\dot{W}_q = -q_0 L_k V_k \cos \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j - \beta_k - \varphi'_k + \theta \right) \quad (15)$$

4.3 土压力的计算

由以上的计算可得内能的消耗率为 $\dot{W}_{\text{int}}$ ，外力的作功率为 $\dot{W}_{\text{ext}}$ ：

$$\dot{W}_{\text{ext}} = \dot{W}_{\text{gra}} + \dot{W}_a + \dot{W}_q \quad (16)$$

由于外荷载的功率应与塑性破坏区的内能消耗率相平衡，所以有：

$$\dot{W}_{\text{int}} = \dot{W}_{\text{ext}} \quad (17)$$

因此，可得

$$\dot{W}_{\text{int}} = \dot{W}_{\text{gra}} + \dot{W}_a + \dot{W}_q \quad (18)$$

可求得主动土压力为

$$P_a = \frac{\dot{W}_{\text{int}} - (\dot{W}_{\text{gra}} + \dot{W}_q)}{V_1 \cos(\alpha_1 + \delta)} \quad (19)$$

将式 (8) ~ (11) 分别代入式 (12)、(13)、(15) 后，可得 $\dot{W}_{\text{int}}$ 、 $\dot{W}_{\text{gra}}$ 、 $\dot{W}_q$ ，再将 $\dot{W}_{\text{int}}$ 、 $\dot{W}_{\text{gra}}$ 、 $\dot{W}_q$ 代入式 (19)，即可得式 (19) 的完整表达式。

5 优化计算及结果

假定挡土墙的高度为 H 、重度为 γ 、超载为 q_0 、填土和墙体的摩擦角 δ 和填土角度 θ 为已知。由式 (19) 的完整表达式可以看出，主动土压力 P_a 是 α_i 、 β_i 、 c_i 、 c'_i 及 φ_i 和 φ'_i 的函数，所以挡墙后土体划分的单元数为 k 时，则 P_a 为包含 $6k$ 个自变量的函数，但因前面式 (6) 中建立了 c 、 φ 的关系式，所以实际上 P_a 为包含了 $4k$ 个自变量的函数。

由于上限总是大于真实解，如果得到的上限解越小，则可认为越接近真实解，所以应当对目标函数中的自变量进行优化，从而得到最小的上限解。而由于本文中的自变量个数较多，采用普通的优化方法很难有效地搜索到目标函数的最优值。因此，本文以大型数学计算软件 (Matlab) 为平台，应用目前较为流行的大型优化算法 SQP 法进行计算，可得出最小的上限解。

优化过程中应特别注意满足约束条件，本文的分析方法中的约束条件分别为几何约束条件和速度场约束条件，这些约束条件限制了自变量的取值范围。几何约束条件包括：① $\sum_{i=1}^k \alpha_i = \frac{\pi}{2} + \theta$ ；② $0 \leq \varphi_i \leq \frac{\pi}{2}$ ， $0 \leq \varphi'_i \leq \frac{\pi}{2}$ ；③ $\alpha_i + \beta_i > \beta_{i-1}$ ；④ $0 \leq \beta_i \leq \pi$ 。

速度场约束条件则需要满足速度矢量三角形的几何条件，即三角形三个内角和为 π ，即① $0 < \beta_{i-1} - \varphi'_{i-1} - \varphi_i < \pi$ ；② $0 < \alpha_i + \beta_i - \beta_{i-1} + \varphi'_{i-1} - \varphi'_i < \pi$ ；③ $0 < \alpha_i + \beta_i - \varphi_i - \varphi'_i < \pi$ 。

在计算过程中，先需设定墙后土体的单元划分数目。首先划分的单元数较少，计算结果较粗略，随着单元数目的增加，计算结果精度也随之提高，最终会收敛于真实解，但实际计算中，前后两次计算结果的差值只需满足一定的差别要求即可。当单元数目取到 10 个左右时，本文前后计算结果差值已小于 1 kN，已有足够的精度，则可以作为优化后的上限解。

为便于与非线性破坏准则下的朗肯土压力理论解作比较，取满足朗肯条件的挡墙进行计算。 c_0 、 σ_t 按一般黏性土的性质分别取为 10 kPa 和 30 kPa，墙高 $H = 7$ m，填土重度 $\gamma = 19$ kN/m³，墙背倾角 $\beta_1 = 90^\circ$ ，即墙背垂直，地面与墙顶夹角 θ 取 0° ，墙顶超载为 10 kPa，墙背与土摩擦角 $\delta = 0^\circ$ ，即墙背光滑。 m 值分别取 1.0、1.2、1.4、1.6、1.8、2.0、2.2、2.4、2.6、2.8，代表不同的非线性程度，以研究不同的非线性程度对主动土压力值的影响。

根据朗肯土压力理论，挡土墙背面填土中任意一点处的应力状态如图 5 所示，作用在水平面的竖直应力为 $\sigma_z = \gamma z + q$ (z 为该点距填土表面的深度， q 为填土表面分布荷载)，作用在竖直面上的水平土应力为

$$p_a = (\gamma z + q) \tan^2(45^\circ - \varphi_t/2) - 2c_t \tan(45^\circ - \varphi_t/2) \quad (20)$$

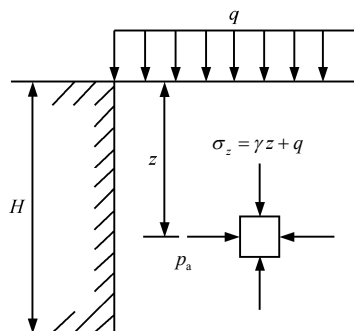


图5 墙后填土单元

Fig.5 Element of the backfill

破坏面上的剪应力为

$$\tau = \frac{\gamma z + q - p_a}{2} \cot \varphi_t \quad (21)$$

将式(21)代入式(5), 引入非线性破坏准则得

$$\frac{\gamma z + q - p_a}{2} \cot \varphi_t = c_0 \left(\frac{m \sigma_t \tan \varphi_t}{c_0} \right)^{\frac{1}{1-m}} - \tan \varphi_t \sigma_n \quad (22)$$

在式(20)和式(22)中 m 、 c_0 、 σ_t 、 z 和 γ 均为已知, φ_t 和 c_t 均为未知量, 且均为 σ_n 的函数, 将式(16)代入式(18)后, 对 σ_n 进行迭代计算即可求得 σ_n , 再将 σ_n 代入式(16), 则可得 $p_a(z)$ 。

作用在墙背面的总土压力为

$$P_a = \int_0^H p_a(z) dz \quad (23)$$

据此可作上限解和非线性破坏准则下的朗肯解的计算结果比较, 其结果见表1。

表1 不同 m 值下的主动土压力上限解与朗肯理论解的比较

Table 1 The comparison between the upper active earth pressure limit solution and Rankie solution in different ' m '

m	主动土压力/(kN/m)		差值/%
	上限解	朗肯理论值	
1.0	179.5	177.3	-1.2
1.2	220.3	217.9	-1.1
1.4	250.1	247.8	-0.9
1.6	272.6	269.9	-1.0
1.8	289.7	286.7	-1.0
2.0	303.4	299.7	-1.2
2.2	314.2	310.1	-1.3
2.4	322.5	318.5	-1.3
2.6	328.7	325.4	-1.0
2.8	335.6	331.2	-1.3

由以上计算的结果可以看出:

(1) 当 $m = 1.0$ 时, 对应的为线性破坏准则下的主动土压力, 其大小为 179.5 kN/m; 而当 $m = 2.8$ 时, 主动土压力值为 335.6 kN/m。可见, 当土体非线性破坏特性较明显时, 仅按照线性破坏准则来计算将带来工程上不能接受的误差。

(2) 通过与引入非线性破坏准则的朗肯土压力理论解比较, 证明了采用本文所介绍的方法具有较高的精度, 在不符合朗肯假定的情况下也可采用本文所述方法进行计算。

6 结 论

随着铁路和公路的高速发展, 在修建过程中遇到大量的边坡稳定性问题, 修建挡土墙是最常见的一种边坡支挡形式。在设计过程中不可避免地需要计算墙后的土压力大小, 目前的土压力计算理论多采用朗肯或者库仑土压力理论等极限平衡方法进行计算, 然而这些理论中都包含大量的假设, 例如: 墙背光滑、填土无黏聚力、平滑面假设等等, 而实际情况往往与假设情况有所差别。除此之外, 目前大多数的理论计算都还停留在线性的破坏准则上, 而大量的实践研究表明, 岩土类材料在破坏过程中大小主应力之间存在着明显的非线性关系^[6-8], 所以这也是值得改进的地方。

本文所述的计算方法能适用于各种情况, 如不同填土的倾角和墙背倾角, 或者墙背与填土之间的摩擦, 而且根据优化计算得出的自变量信息, 可以很方便地确定滑移面的位置。此外, 该法能够很方便地将非线性破坏准则应用到土压力的分析计算, 更好地模拟土体实际的非线性破坏过程。通过与同样引入非线性破坏准则后的朗肯土压力理论解的比较, 发现本文所述的上限分析方法具有较高的求解精度, 能满足工程需求。

需要注意的是, 当 $m = 1.0$ 时, 在式(3)中对应的是一个线性的表达式, 但此时采用的 c 、 φ 值已与传统的线性破坏准则下线性回归后的 c 、 φ 值有所不同, 二者的计算结果是有区别的。但无论如何, 采用线性的破坏准则所得的计算结果一般都会比实测的土压力值小^[9-12], 而采用本文所述方法则更接近实测的土压力值。

由于本方法假设的是墙后为均匀土体, 而实际中可能遇到层状填土, 那么可以采用本文所述方法

先引入非线性破坏准则,再结合陈祖煜建议的斜条分法进行上限分析,便可求解更为复杂情况下的主动土压力值,该方向的研究是值得进一步探讨的。

参考文献

- [1] ZHANG X J, CHEN W F. Stability analysis of slopes with general nonlinear failure criterion[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1987, 11: 33—50.
- [2] 杨小礼, 李亮, 刘宝琛. 非线性破坏准则对被动土压力的影响[J]. **工程力学**, 2004, 21(1): 31—36.
- YANG Xiao-li, LI-liang, LIU Bao-chen. Influences of a nonlinear failure criterion on passive earth pressure[J]. **Engineering Mechanics**, 2004, 21(1): 31—36.
- [3] 杨小礼, 李亮, 刘宝琛. 非线性破坏准则对竖直边坡稳定性分析的影响[J]. **岩石力学与工程学报**, 2004, 23(4): 592—596.
- YANG Xiao-li, LI Liang, LIU Bao-chen. Influences of nonlinear failure criterion on stability analysis of vertical cut using nonlinear SQP algorithm[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2004, 23(4): 592—596.
- [4] 蔡中民, 徐文令, 张建文. 非线性 Mohr-Coulomb 体边坡的极限荷载[J]. **固体力学学报**, 1995, 16(3): 254—258.
- CAI Zhong-min, XU Wen-ling, ZHANG Jian-wen. The limit loading of slopes for nonlinear mohr-coulomb material[J]. **Acta Mechanica Solida Sinica**, 1995, 16(3): 254—258.
- [5] 顾慰慈. 挡土墙土压力计算[M]. 北京: 中国建材工业出版社, 2001.
- [6] 范文, 沈珠江, 俞茂宏. 基于统一强度理论的土压力极限上限分析[J]. **岩土工程学报**, 2005, 27(10): 1147—1153.
- FAN Wen, SHENG Zhu-jiang, YU Mao-hong. Upper-bound limit analysis of earth pressure based on unified strength theory[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2005, 27(10): 1147—1153.
- [7] 罗强, 蔡英, 邵启毫. 成都黏土重力式挡土墙的工程试验[J]. **西南交通大学学报**, 1995, 30(3): 270—274.
- LUO Qiang, CAI Ying, SHAO Qi-hao. Engineering testing of gravity retaining wall in Chengdu[J]. **Journal of Southwest Jiaotong University**, 1995, 30(3): 270—274.
- [8] 徐千军, 李明元, 陆杨. 边坡稳定极限分析的单元集成法[J]. **岩土力学**, 2006, 27(7): 1028—1032.
- XU Qian-jun, LI Ming-yuan, LU Yang. Upper bound limit analysis of slope stability by element integration method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2006, 27(7): 1028—1032.
- [9] 弥宏亮, 陈祖煜, 张发明, 等. 边坡稳定三维极限分析方法及工程应用[J]. **岩土力学**, 2002, 23(5): 649—653.
- MI Hong-liang, CHEN Zu-yu, ZHANG Fa-ming, et al. The 3D limit method for slope stability analysis and applications[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2002, 23(5): 649—653.
- [10] 岳祖润, 彭胤宗, 张师德. 压实黏性填土挡土墙压力离心模型试验[J]. **岩土工程学报**, 1992, 14(6): 90—96.
- YUE Zu-run, PENG Yi-zong, ZHANG Shi-de. Retaining wall pressure centrifugal model testing of compacting clay[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1992, 14(6): 90—96.
- [11] 杨雪强, 何世秀, 余天庆. 加筋砂土作用在挡土墙上的土压力研究[J]. **岩土力学**, 1997, 18(1): 25—34.
- YANG Xue-qiang, HE Shi-xiu, YU Tian-qing. Research about the pressure of reinforced cohesionless backfill acted on the retaining wall[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 1997, 18(1): 25—34.
- [12] 陈祖煜. 土力学经典问题的极限分析上、下限解[J]. **岩土工程学报**, 2001, 24(1): 1—11.
- CHEN Zu-yu. Limit analysis for the classic problems of soil mechanics[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2001, 24(1): 1—11.